Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1980

Composition de Mathématiques (4 h)

2e EPREUVE

INTRODUCTION

On étudie ci-dessous la fonction y d'une variable réelle, définie par :

$$y(x) = \frac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}.$$

Dans la première partie on en construit la courbe représentative. Dans la deuxième partie on résoud certains problèmes relatifs à son intégration.

PREMIÈRE PARTIE

1° a) Etudier les variations de la fonction u d'une variable réelle définie par :

$$u(x) = x^3 - 2x^2 - 1.$$

b) Démontrer que l'équation

$$u(x) = 0$$

a une et une seule racine réelle x_0, et que

$$4/3 < x_0.$$

c) Démontrer que l'on a plus précisément :

$$2 < x_0 < 3.$$

2° On construit par récurrence les suites réelles (x_n) et (y_n) en posant :

pour $n = 1$, $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, et

pour $n > 1$, $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$, $y_n = y_{n-1}$, si $u\left[\frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})\right] \leqslant 0$,

$x_n = x_{n-1}$, $y_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$, si $u\left[\frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})\right] > 0$.

a) Calculer x_2 et y_2, x_3 et y_3, x_4 et y_4.

b) Montrer que l'on a, pour tout n,

$$x_n \leqslant x_0 \leqslant y_n.$$

c) Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

d) Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près.

3° a) Quel est le domaine de définition de la fonction y citée dans l'introduction ?

b) Calculer la dérivée $y'(x)$, et l'exprimer en fonction de u (x).

c) Dresser le tableau de variation de y.

.../...

4° a) Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction y au voisinage de 0.

b) Quelle est la tangente au point (0, 0) de la courbe représentative de y ? Quelle est la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de (0, 0) ?

5° Etudier les quatre branches infinies de la courbe représentative de y : existence d'asymptotes et position de la courbe par rapport à celles-ci.

6° Tracer la courbe représentative de la fonction y.

DEUXIÈME PARTIE

1° On considère les fonctions rationnelles A et B définies par

$$A(t) = \frac{t^6 + t^4 - t^2 - 1}{t^3 (t^2 - 2t - 1)} \qquad \text{et} \qquad B(t) = \frac{6t^4 + 2t^3 - t^2 - 1}{t^3 (t^2 - 2t - 1)}.$$

a) Déterminer la partie entière de A.

b) Quels sont les pôles de A ? Quels sont leurs ordres de multiplicité ? Donner la forme de la décomposition de A en éléments simples et la forme de la décomposition de B en éléments simples (sans calculer les numérateurs des éléments simples).

c) Sachant que la partie de la décomposition de B relative au pôle 0 est

$$\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t^2} + \frac{6}{t},$$

donner la décomposition complète de B en éléments simples. En déduire la décomposition de A en éléments simples.

d) Déduire des calculs précédents une primitive C de A.

2° On veut déterminer pour $x > 1$ une primitive de la fonction y citée dans l'introduction.

a) Soit I la primitive de y définie, pour $a > 1$ et $x > 1$, par

$$I(x) = \int_a^x \frac{z}{z-1} \sqrt{z^2 + 1}\, dz.$$

Effectuer sur I (x) le changement de variable :

$$2z = t - \frac{1}{t} \qquad \text{avec } t > 0.$$

b) Exprimer I en fonction de C définie en 1° d) de la deuxième partie.

3° L'intégrale $\int_1^2 y(x)\, dx$ est-elle convergente ? Pourquoi ?

4° On considère l'aire J (m) de la région du plan définie par les inégalités suivantes :

$$x_0 \leqslant x \leqslant m \quad \text{et} \quad x + 1 \leqslant y \leqslant y(x),$$

où m est un paramètre supérieur ou égal à la racine x_0 définie en 1° b) de la première partie.

a) Représenter J (m) par des hachures sur le graphique de la courbe représentative de y.

b) L'aire J (m) a-t-elle une limite finie lorsque m tend vers l'infini ?

c) Calculer une valeur approchée de J (4) en utilisant la valeur approchée de x_0 calculée en 2° d) de la première partie.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail